

# SPAȚII VECTORIALE (LINIAR)

1. Fie  $S$  mulțimea tuturor șirurilor de numere reale. Dacă  $\vec{x} \in S$  convenim să notăm șirul în forma  $\vec{x} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ . Arătați că  $S$  este spațiu vectorial infinit dimensional și prezentați o bază în  $S$ .
2. Fie  $m \subset S$  mulțimea șirurilor mărginite. Avem că  $\vec{x} \in m$  dacă  $\exists M_x > 0$  astfel încât  $|a_i| \leq M_x$ , oricare ar fi  $i \in \mathbb{N}^*$ . Să se arate că  $m$  este subspațiu liniar al spațiului vectorial  $S$ . Prezentați dimensiunea și o bază.
3. Se notează cu  $C$  mulțimea șirurilor numerice convergente și cu  $C_0$  mulțimea șirurilor de numere reale convergente la 0. Să se arate că  $C_0 \subset C \subset m \subset S$  și că  $C_0$  este subspațiu liniar al spațiului liniar  $C$  care la rândul-i este subspațiu liniar al lui  $m$ .
4. Să se găsească combinația liniară  $3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 7\vec{u}_3$  unde  $\vec{u}_1 = (3, 1, -7, 4) \in \mathbb{R}^4$ ,  $\vec{u}_2 = (1, 5, 0, 6) \in \mathbb{R}^4$  și  $\vec{u}_3 = (-1, 1, 3, 0) \in \mathbb{R}^4$ .  
Discutați rezultatul obținut. Ce se poate spune despre sistemul de vectori  $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ ?
5. Se dă sistemul de polinoame:  $f_1(t) = 1 - t^2$ ,  $f_2(t) = 1 + t^3$ ,  $f_3(t) = t - t^3$ ,  $f_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$ . Să se găsească combinațiile liniare  $5f_1 + f_2 - 4f_3$  și  $f_1 + 9f_2 - 4f_4$ . Discutați rezultatele obținute. Ce se poate spune despre sistemul dat?

6. Să se arate că sistemul de vectori  
 $S = \{ \vec{a}_1 = (1, 2, 5), \vec{a}_2 = (5, 3, 1), \vec{a}_3 = (-15, -2, 21) \} \subset \mathbb{R}^3$   
 este format din vectori linear dependenți  
 și să se găsească dependența dintre ei.

Indicație Se știe matricea  $C$  de trecere de la baza canonică  $B = \{ \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1) \}$  la sistemul  $S$  de vectori din  $\mathbb{R}^3$ . Se arată că  $\text{rang } C = 2$ .

Răspuns.  $\vec{a}_3 = 5\vec{a}_1 - 4\vec{a}_2$ .

7. Să se arate că sistemele de vectori:

$$S_1 = \{ \vec{u}_1 = (1, 1, 0), \vec{u}_2 = (1, -1, -1) \} \subset \mathbb{R}^3;$$

$$S_2 = \{ \vec{v}_1 = (9, -1, -5), \vec{v}_2 = (7, -1, -4) \} \subset \mathbb{R}^3$$

generează același subspațiu vectorial al lui  $\mathbb{R}^3$ .

Indicație Subspațiile liniare generate sunt:

$$[S_1] = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$[S_2] = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{y} = \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Cele două subspații coincid dacă și numai dacă din egalitatea  $\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 = \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2$  se poate exprima în mod unic  $\alpha_1, \alpha_2$  în funcție de  $\beta_1, \beta_2$  și, de asemenea,  $\beta_1, \beta_2$  în funcție de  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Răspuns. 
$$\begin{cases} \alpha_1 = 4\beta_1 + 3\beta_2 \\ \alpha_2 = 5\beta_1 + 4\beta_2 \end{cases}, \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \text{ adică } [S_2] \subseteq [S_1]$$

$$\begin{cases} \beta_1 = 4\alpha_1 - 3\alpha_2 \\ \beta_2 = -5\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{cases}, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ adică } [S_1] \subseteq [S_2]$$
  
 Am ale două incluziuni rezultă că  $[S_1] = [S_2]$ .

8. Să se arate că în spațiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 2, sistemele de polinoame  $S_1 = \{x, x^2\}$  și  $S_2 = \{x+2x^2, 2x+5x^2\}$  generează același subspațiu, adică  $[S_1] = [S_2]$ .

Răspuns.  $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = \beta_1(x+2x^2) + \beta_2(2x+5x^2)$ ,  
 $\forall x \in \mathbb{R}$ , de unde rezultă

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 + 2\beta_2 \\ \alpha_2 = 2\beta_1 + 5\beta_2 \end{cases} \text{ și reciproc } \begin{cases} \beta_1 = 5\alpha_1 - 2\alpha_2 \\ \beta_2 = -2\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

9. Să se studieze liniara dependentă a sistemelor de vectori:

1)  $\vec{v}_1 = (1, 2, -4)$ ;  $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, 4, -2)$ ;

2)  $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (0, 1, 1)$ ;

3)  $\vec{v}_1 = (2, 1, 3, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 2, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (-1, 1, 3, 0)$ .

Răspuns: 1) Liniar dependenți:  $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$ ;

2) Liniar independenți, deci formează bază în  $\mathbb{R}^3$ ;

3) Liniar dependenți:  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$ .

10. Să se studieze liniara dependentă a sistemului  $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$  de vectori din  $\mathbb{R}^5$ , unde  $\vec{v}_1 = (2, 0, 1, 3, -1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1, 0, -1, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (0, -2, 1, 5, -3)$  și  $\vec{v}_4 = (1, -3, 2, 9, -5)$ .

Indicație. Se scrie matricea  $C$  de trecere de la baza canonică  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^5$  la sistemul  $S$ .

Se determină  $\text{rang } C$  și se găsește  $\text{rang } C = 2$ . Doi dintre vectori sunt liniar independenți, ceilalți fiind combinații liniare de acești doi. Se găsește  $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$  și  $\vec{v}_4 = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$ .

pagina 4  
TEMA NR. 2

11. Să se determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât vectorii:

1)  $\vec{u}_1 = (1, \alpha, \alpha)$ ,  $u_2 = (\alpha, 1, 2\alpha - 1) \in \mathbb{R}^3$ ;

2)  $\vec{v}_1 = (1, \alpha, \alpha, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (\alpha, 1, \alpha, \alpha)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, 1, 1, \alpha) \in \mathbb{R}^4$   
să fie linear independenți.

Indicație. Se scriu matricele de trecere  $C_1$  și  $C_2$  de la baza canonică din  $\mathbb{R}^3$  la primul sistem de vectori și respectiv de la baza canonică din  $\mathbb{R}^4$  la al doilea sistem. Se presupune ca  $\text{rang } C_1 = 2$  și  $\text{rang } C_2 = 3$ .

Răspuns. 1)  $\alpha \neq 1$ ; 2)  $\alpha \neq 1$ .

12. Fie mulțimea de matrice

$$V = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

1) Să se arate că  $V$  este subspațiu vectorial al lui  $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$ .

2) Să se arate că sistemul  $B = \{E_1, E_2, E_3\} \subset V$ , unde  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  este bază în  $V$ .

3) Să se găsească coordonatele vectorului  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$  în baza  $B$ .

Indicație 1) Se consideră  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  și  $A_1, A_2$  din  $V$ , elemente oarecare și se arată că  $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in V \Rightarrow V$  subspațiu în  $M_2(\mathbb{R})$ .

2) Se arată că  $B$  este sistem linear independent și că generează pe  $V$ .

3) Se scrie  $A = x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3$ . Se găsește  $A = (3, 4, 1)_B$ .

13. Fie  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  cu  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$  baza canonică din  $\mathbb{R}^3$  și fie  $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$  un sistem de trei vectori dati prin

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \quad \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3, \quad \text{și}$$

$$\vec{e}'_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

- a) Să se arate că  $B'$  este bază în  $\mathbb{R}^3$ .  
b) Să se găsească coordonatele vectorului  $\vec{x} = 6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3$  în baza  $B'$ .

Indicație. a) Scrieți matricea  $C$  de trecere de la baza  $B$  la sistemul  $B'$  de vectori și arătați că  $C$  este nesingulară.

b) Matricea coloană  $X'$  a coordonatelor vectorului  $\vec{x}$  în baza  $B'$  este legată de matricea  $X$  a coordonatelor aceluiași vector în baza  $B$  prin relația  $X' = C^{-1}X$ .

Răspuns. a)  $\det C = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$ . Se găsește

$$\text{că } C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$b) \vec{x} = (1, 1, 1)_{B'} = \vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3.$$

14. Să se arate că  $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'_4\}$ , unde:  
 $\vec{e}'_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\vec{e}'_2 = (1, 1, -1, 1)$ ,  $\vec{e}'_3 = (1, -1, 1, -1)$ ,  $\vec{e}'_4 = (1, -1, -1, 1)$ ,  
formează o bază în  $\mathbb{R}^4$  și să se determine coordonatele vectorului  $\vec{u} = (1, 2, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$  în această bază.

Indicație Se scrie  $C \in M_4(\mathbb{R})$ , matricea de trecere de la baza  $B$  la sistemul de vectori  $B'$ . Se arată că  $C$  este nesingulară, deci  $B'$  este bază. Pentru coordonate se aplică  $U' = C^{-1}U$ , unde  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  și  $U' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}$ . Se găsește  $\vec{u} = (1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})_{B'}$ .

15. În spațiul vectorial  $\mathbb{R}^3$  se consideră sistemele de vectori:

$$B' = \{\vec{e}'_1 = (1, 1, 0), \vec{e}'_2 = (1, 0, 0), \vec{e}'_3 = (1, 2, 3)\},$$

$$B'' = \{\vec{e}''_1 = (1, 3, 3), \vec{e}''_2 = (2, 2, 3), \vec{e}''_3 = (6, 7, 9)\}.$$

1) Să se arate că  $B'$  și  $B''$  sunt baze și să se afle matricea de trecere  $C$  de la  $B'$  la  $B''$ .

2) Să se găsească coordonatele vectorului  $\vec{x} = 2\vec{e}'_1 + 5\vec{e}'_2 + 7\vec{e}'_3$  în baza  $B''$ .

Indicație 1)  $B \xrightarrow{C'} B'$ , unde  $C' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$B \xrightarrow{C''} B'', \text{ unde } C'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aici  $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$  este baza canonică din  $\mathbb{R}^3$ . Se arată că  $C'$  și  $C''$  sunt matrice neregulare. Apoi

$$B' \xrightarrow{C} B'' \text{ și se vede că } C = (C')^{-1} C''.$$

2) Se aplică legea de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare a bazei.

Răspuns. 1)  $\det C' \neq 0$ ,  $\det C'' \neq 0$ ;

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2) \vec{X}'' = C^{-1} \vec{X}' =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Prin urmare}$$

$$\vec{x} = \vec{e}''_2 + 2\vec{e}''_3.$$

16. Fie  $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'_4\}$ , unde  $\vec{e}'_1 = (1, 2, -1, -2)$ ,  $\vec{e}'_2 = (2, 3, 0, 1)$ ,  $\vec{e}'_3 = (1, 2, 1, 3)$ ,  $\vec{e}'_4 = (1, 3, -1, 0)$ .

Arătați că  $B' \subset \mathbb{R}^4$  este bază și găsiți coordonatele vectorului  $\vec{x} = (1, 1, 1, 1)$  în baza  $B'$ .

Răspuns. Se arată că matricea de trecere  $C$  este neregulară. Pentru coordonate se aplică relația  $\vec{X}' = C^{-1} \vec{X}$ . Se găsește  $\vec{x} = (1, 0, 1, -1)$ .